ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Fusionnée avec

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier en 1864)

Reconnues d'utilité publique

CONGRÈS DE CAEN

1894

M. Gaston TARRY

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE. — LES DROITES ET LES PLANS

PARIS

AU SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

28, RUE SERPENTE

(Hôtel des Sociétés savantes)

16

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE CAEN — 1894

M. Gaston TARRY
Inspecteur des Contributions diverses, à Alger.

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE — LES DROITES ET LES PLANS (*)

— Séance du 10 août 1894 —

LES FIGURES DE MOUCHOT

232. — Nous avons appelé ligne droite le lieu géométrique des points dont les composantes positive et négative sont les points homologues de deux figures inversement semblables. Cette définition ne peut s'appliquer qu'aux droites particulières situées dans des plans réels, puisque la représentation du point par ses composantes isotropes n'a pas de sens dans l'espace.

Avant d'aborder l'espace, il faut donc chercher une autre définition de la droite. La marche suivante est tout indiquée :

Représenter les points de la droite du plan réel par ses composantes origine et terme, examiner les propriétés des figures formées par ces composantes et choisir celle d'entre elles qui se prête le mieux à la généralisation.

Soient A, B les composantes origine et terme d'un point de la droite, et B′ le symétrique de B par rapport à A. Dans la représentation de M. Mouchot, B et B′ sont la première et la seconde composantes du point. Dans le plan de la droite, faisons tourner le segment BB′ autour de la composante origine A d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$; B et B′ viendront occuper les positions des composantes positive et négative du point AB.

(*) Suite du mémoire inséré au C. R. du Congrès de Besançon, 1893, p. 217.

Ainsi, lorsqu'un point décrit une droite dans le plan réel, les composantes de M. Mouchot décrivent deux figures qui se correspondent point à point de telle manière que, si l'on fait tourner d'un angle droit autour de son point milieu chaque segment qui relie deux points homologues, ces deux points viennent occuper respectivement les positions homologues de deux figures inversement semblables.

Le point double et les axes de pseudo-symétrie des deux figures inversement semblables seront appelés le centre et les axes du système des deux figures de M. Mouchot.

233. — Les figures de M. Mouchot possèdent de nombreuses propriétés. En voici un dizain :

I. — Un système de deux figures de Mouchot est déterminé quand on donne deux couples de points homologues, A, A′ et B, B′, à la condition toutefois que les droites AB et A′B′ ne soient pas parallèles (*).

II. — Dans tout triangle qui a pour sommets le centre O du système et deux points homologues P et P′, le rapport de la somme des carrés des distances OP et OP′ à la surface du triangle OPP′ est un nombre constant.

III. — Les droites qui joignent le centre à deux points homologues sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, dont le centre et les axes sont le centre et les axes du système. Le rapport de la somme à la différence des axes de cette ellipse est égal au rapport de similitude des deux figures inversement semblables liées au système.

IV. — Deux triangles dont les sommets correspondants sont des points homologues, peuvent toujours être projetés sur un plan suivant deux triangles égaux, dont les côtés correspondants sont perpendiculaires.

V. — Deux figures de Mouchot sont deux figures affines, c'est-à-dire deux figures homographiques dans lesquelles les droites à l'infini se correspondent.

Les figures de Mouchot possèdent donc toutes les propriétés des figures affines; je mentionnerai seulement la suivante, parce qu'elle ne paraît pas avoir été remarquée.

Considérons les figures directement semblables qui ont pour lignes homologues les segments joignant deux points homologues de deux figures affines.

Dans toutes ces figures il existe une infinité de points homologues en ligne droite; ces droites tournent autour d'un point fixe.

Dans les figures de Mouchot, ce point fixe est le centre du système.

(*) Si les deux droites AB et A′B′ étaient parallèles, le système des deux figures de Mouchot se réduirait à deux droites parallèles, et les deux figures inversement semblables liées au système seraient inversement égales. En d'autres termes :

Si deux sommets opposés d'un carré de grandeur variable décrivent des figures inversement égales, les deux autres sommets glissent sur deux droites parallèles, et réciproquement.

VI. — Deux figures de Mouchot sont projetées sur un plan quelconque suivant deux figures de Mouchot.

Cette propriété projective est remarquable.

VII. — A une ligne quelconque φ_1 de la première figure correspond une ligne φ_2 dans la seconde; à la ligne φ_2, considérée dans la première figure, correspond la ligne φ_3 de la seconde; à la ligne φ_3 de la première figure correspond la ligne φ_4 de la seconde; enfin à la ligne φ_4 de la première correspond la ligne φ_5.

La ligne φ_5 se confond avec la ligne φ_1 et les lignes φ_1 et φ_3 sont égales et homothétiques, ainsi que les lignes φ_2 et φ_4.

VIII. — Soient OX et OY deux semi-droites fixes. Par un point quelconque P menons la semi-droite parallèle de même sens à OY, et soit A son point d'intersection avec OX. Sur la semi-droite OY prenons le segment OA′ égal à OA, puis menons par le point A′ une semi-droite parallèle de sens contraire à OX, et déterminons sur cette parallèle le segment A′P′ égal à AP. A chaque point P du plan faisons correspondre de la manière indiquée un point P′.

Les points P et P′ sont les points homologues de deux figures de Mouchot.

C'est cette propriété que M. Mouchot a choisie pour définir la ligne droite.

IX. — Deux systèmes de Mouchot ont en commun un couple de points homologues et un seul.

En particulier, sur une droite quelconque du plan du système se trouve un couple de points homologues et un seul. A chaque droite du plan correspond de la sorte un couple de points homologues, et par suite un point et un seul dans les deux figures de Mouchot et les deux figures inversement semblables liées au système. Réciproquement à chaque point de l'une quelconque de ces quatre figures correspond dans le plan une droite et une seule.

X. — Par un point quelconque du plan menons quatre droites, puis construisons les quatre points qui correspondent à ces droites dans l'une ou l'autre des figures inversement semblables.

Les quatre points sont situés sur une circonférence, et le rapport anharmonique de ce quaterne de points est égal au rapport anharmonique du faisceau des quatre droites correspondantes.

LES DROITES DE PREMIÈRE ESPÈCE

234. — Les droites de *première espèce* sont celles qui sont situées dans un plan réel.

Nous avons rencontré trois droites différentes de première espèce; pour les distinguer, nous leur donnerons trois noms différents.

La *droite radiée* est celle qui possède un point propre réel et un seul.

La droite isotrope n'est qu'une variété de la radiée ; c'est la droite isorectangle de M. Mouchot.

La *droite disjointe* est celle qui possède aussi un seul point réel, mais situé à l'infini. Les lieux géométriques des composantes origines et des composantes termes de tous les points d'une disjointe sont deux droites parallèles que nous appellerons *directrices*.

La *droite conjointe* est celle qui a une infinité de points réels, situés sur une ligne droite. Cette droite réelle est le lieu géométrique des composantes origines et termes de tous les points de la conjointe. Dans la conjointe, les deux directrices, origine et terme, sont superposées.

Pour faire disparaître le mot imaginaire de la géométrie générale, nous dirons qu'*un point est disjoint ou conjoint*, suivant que ses composantes sont séparées ou superposées.

L'appellation de réel sera réservée aux figures de la géométrie ordinaire. Ainsi, le point réel, la droite réelle et le plan réel désigneront le point, la droite et le plan de la géométrie ordinaire.

235. — Représentons tous les points d'une radiée par ses composantes de Mouchot. Les couples de ces composantes sont des couples de points homologues de deux figures de Mouchot. En vertu de la proposition du VI du dizain, le système de ces deux figures est projeté sur un plan quelconque suivant un autre système de Mouchot, qui représente une radiée dans le plan de projection, si toutefois le plan de projection n'est pas perpendiculaire au plan de la figure.

Appelons projection d'un point AB sur un plan réel, le point A'B' dont les composantes origine et terme, A' et B', sont les projections des composantes origine et terme, A et B, du point AB.

La propriété rappelée peut s'énoncer sous cette forme :

THÉORÈME. — *Le lieu géométrique des projections sur un plan réel de tous points d'une droite de première espèce est une droite de première espèce.*

236. — Dans le plan de la droite, déplaçons les deux figures inversement semblables déterminées par les composantes isotropes des points de la droite, par deux translations parallèles de même grandeur et de directions opposées.

Les composantes origines ne changeront pas de position, mais la figure des composantes termes sera déplacée par une translation égale aux précédentes, mais de sens perpendiculaire. Donc :

THÉORÈME. — *Lorsque, dans le plan d'une droite de première espèce* AA'BB', *on mène par les composantes termes* A', B', ... *des segments*

A'A'', B'B'', ... *égaux et parallèles de même sens, le lieu des points* AA'', BB'', ... *est une seconde droite* AA''BB'' *parallèle à la première* AA'BB'.

LES DROITES DE SECONDE ESPÈCE

237. — On appelle *droites de seconde espèce* celles qui ne peuvent pas être situées dans un plan réel.

Par les composantes termes A', B', ... d'une droite radiée AA'BB', menons, *en dehors du plan de la radiée*, des segments A'A'', B'B'', ... égaux et parallèles de même sens. Par définition, nous appellerons *droite congruente* le lieu géométrique des points AA'', BB'' ...

Toutes les droites de seconde espèce sont des congruentes.

Deux points d'une congruente ne sont jamais situés dans un même plan réel. Par deux points non situés dans un même plan réel, on peut toujours faire passer une congruente et une seule.

Le lieu géométrique des composantes origines des points d'une congruente est un plan, et le lieu géométrique des composantes termes un autre plan parallèle au premier. Ces deux plans sont les *plans directeurs* de la congruente.

La projection d'une congruente sur un plan réel est une radiée ou une disjointe. C'est une disjointe dans le cas particulier où le plan de projection est perpendiculaire aux plans directeurs de la congruente.

Les composantes origine et terme des points d'une congruente sont les points homologues de deux figures affines, situées respectivement dans les plans directeurs origine et terme. La droite à l'infini, intersection des plans directeurs, est un élément commun aux deux figures affines.

La droite congruente est identique à la droite générale de M. Molenbroch (*N. A. M.*, 1891, p. 434). C'est par une étude sur les quaternions de Hamilton, que M. Molenbroch est parvenu aux résultats exposés par Laguerre, en 1872, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

238. — Deux figures affines, situées dans des plans différents et dont la droite d'intersection est un élément correspondant commun, sans que les points de cette droite se correspondent à eux-mêmes, engendrent une congruence linéaire ; toute droite, qui joint deux points homologues des deux plans, fait partie de la congruence (Reye). En conséquence :

THÉORÈME. — *Le lieu géométrique des supports des points d'une congruente est une congruence linéaire.*

COROLLAIRE. — *Parmi les supports des points d'une congruente, il y en a un et un seul passant par un point réel quelconque, et également un et un seul situé dans un plan réel quelconque.*

*

Ainsi, un plan réel quelconque coupe toujours une congruente en un point et en un seul ; les composantes projectives (origine et terme) de ce point sont les intersections des plans directeurs avec la droite de la congruence linéaire située dans le plan sécant.

239. — Dans l'étude des propriétés métriques des figures de l'espace, on constate l'existence de congruentes telles que la distance de deux quelconques de leurs points est nulle ; ce sont des *droites isotropes de seconde espèce.*

En résumé, en géométrie générale on rencontre six droites différentes, dont voici la nomenclature :

1° Les conjointes	Droites de première espèce.
2° Les disjointes.	
3° Les radiées.	
4° Les isotropes radiées. . . .	
5° Les congruentes.	Droites de seconde espèce.
6° Les isotropes congruentes .	

LES PLANS

240. — *Nous nommerons plan tout lieu géométrique de points,* AUTRE QUE L'ESPACE, *qui est tel qu'une droite quelconque y est contenue tout entière, si elle passe par deux de ses points.*

Cette définition, qui assujettit le plan à une infinité de conditions, peut-être incompatibles, doit être justifiée comme un véritable théorème.

La proposition suivante justifie notre définition.

241. — THÉORÈME. — *Le lieu géométrique des points projetés sur un plan réel, suivant une droite donnée, est un plan.*

Soient A et B deux points quelconques du lieu géométrique ; les projections de ces deux points sont deux points A′ et B′ de la droite donnée. La projection de la droite AB est évidemment la droite A′B′. Par conséquent, tout point de la droite AB est projeté suivant un point de la droite donnée A′B′, et appartient au lieu géométrique.

Dans le cas particulier où les deux points A′ et B′ se confondent, on voit immédiatement que la droite AB est une disjointe ou une conjointe, contenue tout entière dans le lieu.

Le lieu géométrique considéré est donc un plan.

Nous dirons que ce plan est conjoint, disjoint, radié, isotrope, suivant que la droite A′B′ est elle-même conjointe, disjointe, radiée, isotrope.

Le *plan radié,* non isotrope ou isotrope, possède une infinité de points

conjoints dont le lieu géométrique est une droite que nous appellerons *axe*.

A chaque point réel de l'espace, considéré comme composante origine ou terme d'un point du plan radié, correspond une infinité de composantes termes ou origines, dont le lieu géométrique est une droite parallèle à l'axe. Notre plan radié est identique au plan radié de M. Mouchot et au plan général de M. Molenbroch.

Dans le *plan disjoint*, les lieux géométriques des composantes origines et termes des points du plan sont des plans parallèles que nous nommerons *directeurs*. Le plan disjoint ne possède pas de point conjoint propre; tous ses points conjoints sont situés à l'infini, sur la droite d'intersection des plans directeurs.

Le *plan conjoint* possède une infinité de points conjoints dont le lieu est un plan. Dans le plan conjoint les deux plans directeurs sont superposés.

242. — Théorème. — *Par trois points quelconques* A, B, C, *non situés en ligne droite, on peut toujours faire passer un plan.*

Menons un plan réel qui coupe les deux droites AB et AC, ce qui est toujours possible. Soient B′ et C′ les points d'intersection. Le plan qui passerait par les trois points A, B, C passerait également par les trois points A, B′, C′, et réciproquement. Cette remarque permet de ramener le théorème au cas où les droites AB, AC, BC sont toutes trois de première espèce.

Si ces trois droites sont situées dans un même plan réel, elles appartiennent à un même plan conjoint.

Si deux de ces droites sont disjointes, l'on voit immédiatement qu'on peut faire passer un plan disjoint par les trois points A, B, C.

Ces deux cas éliminés, le problème revient à mener un plan par trois points A, B, C non en ligne droite, dont deux sont conjoints, A et B, et le troisième C disjoint.

Projetons ces trois points sur un plan réel perpendiculaire à la droite réelle qui passe par les points A et B. Les projections des points A et B se confondent en un seul point conjoint A′ et la projection du point C est un point disjoint C′. Le lieu géométrique des points projetés suivant la radiée A′C′ est un plan qui passe par les trois points A, B, C.

Ainsi par trois points quelconques, non situés en ligne droite, on peut toujours faire passer un plan soit radié, soit disjoint ou conjoint.

Il n'est pas encore permis d'affirmer que ces trois formes de plan composent le groupe entier des plans de l'espace; car nous n'avons pas démontré qu'il est impossible de mener un autre plan par les points A, B, C.

243. — *Par trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, on ne peut faire passer qu'un seul plan.*

Supposons qu'il soit possible de mener par ces trois points un second plan qui ne coïnciderait pas avec le premier, et soit O un point du second plan n'appartenant pas au premier.

Nous pouvons toujours mener par le point O une infinité de plans réels coupant les droites AB et AC. Considérons l'un quelconque de ces plans réels, et soient P, Q les points d'intersection de ce plan avec les droites AB, AC. La droite PQ et le point O, qui par hypothèse n'appartient pas à cette droite, feraient partie du second plan ; de plus, en vertu de notre définition du plan, toute droite qui passe par le point O et un point quelconque de la droite PQ serait aussi contenue dans le second plan. On conclut de là que le second plan contiendrait tous les points situés dans le plan réel considéré, et dans une infinité d'autres.

Le second plan ABC renfermerait alors tous les points de l'espace, lieu que nous avons eu bien soin d'exclure de la définition du plan.

Le théorème est donc démontré.

244. — *Un plan quelconque de la Géométrie générale est nécessairement radié, ou disjoint, ou conjoint.*

Tout plan de la Géométrie générale peut être projeté sur un plan réel suivant une ligne droite.

Le lieu géométrique des points communs à deux plans qui passent par les points A *et* B *est la droite* AB.

Un plan est déterminé :

1° Par trois points non situés en ligne droite ;

2° Par une droite et un point extérieur à cette ligne ;

3° Par deux droites qui se coupent.

245. — On démontre que toutes les propriétés descriptives, métriques et angulaires des figures situées dans le plan réel subsistent pour les figures contenues dans les divers plans de la Géométrie générale, exception faite du plan radié particulier que nous avons appelé isotrope.

En effet, dans la *Géométrie du plan isotrope :*

1° *Deux droites quelconques se coupent sous un angle égal à zéro;*

2° *Le lieu des points également distants d'un point donné est un système de deux droites ;*

3° *Dans tout triangle un côté quelconque est égal à la somme ou à la différence des deux autres.*

Ces propriétés singulières, trouvées par la Géométrie générale, ont été démontrées ensuite par l'analyse. (Voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* tome I, p. 168.)

246. — Théorème. — *Deux plans, α et β, ont en commun une infinité de points ou aucun.*

Premier cas. — L'un et l'autre plan est disjoint ou conjoint.

Si les couples de plans directeurs ne sont pas parallèles, on peut mener une infinité de plans réels qui rencontrent les plans α et β suivant deux droites, disjointes ou conjointes, qui se coupent en un point commun aux plans α et β.

Si les couples de plans directeurs sont parallèles, les deux plans α et β n'ont aucun point commun.

Deuxième cas. — L'un des plans est radié et l'autre disjoint ou conjoint.

Tout plan réel qui rencontre l'axe du plan radié et les directeurs du plan disjoint ou conjoint, coupe ces deux plans suivant une radiée et une disjointe ou conjointe. Une radiée et une disjointe ou conjointe, situées dans un même plan réel, ont toujours un point propre commun. Par conséquent, les plans α et β ont une infinité de points communs.

Troisième cas. — Les plans α et β sont tous deux radiés.

Si les axes des plans ne sont pas parallèles, tout plan réel oblique à l'un des axes et parallèle à l'autre rencontre les deux plans suivant deux droites, une radiée et une disjointe ou conjointe, qui ont toujours un point commun.

Si les axes sont parallèles, projetons les deux plans sur un plan réel perpendiculaire aux deux axes. Les projections des plans sont deux radiées, sécantes ou parallèles; suivant que l'un ou l'autre cas se présente, les plans α et β ont en commun tous les points d'une droite disjointe ou conjointe, ou n'ont aucun point commun.

Deux plans qui ont un point commun ont une droite commune.

Deux plans distincts ne peuvent offrir que deux positions relatives :

1° Ils ont en commun une droite unique; on dit alors qu'ils *se coupent.*

2° Ils n'ont aucun point commun ; on dit alors qu'ils sont *parallèles.*

PLANS ET DROITES PARALLÈLES.

247. — Théorème. — *Par un point* A *extérieur à un plan π, on peut toujours mener un plan parallèle à ce plan, et l'on n'en peut mener qu'un seul.*

Si le plan π est disjoint ou conjoint, tous les plans qui lui sont parallèles sont disjoints ou conjoints, et ont leurs plans directeurs parallèles aux plans directeurs du plan π ; autrement, les plans rencontreraient le plan π. Par conséquent, par le point A on peut mener un plan et un seul

parallèle au plan π ; ce plan parallèle a pour plans directeurs, origine et terme, les plans réels parallèles aux plans directeurs de π et passant respectivement par les composantes origine et terme du point A.

Si le plan π est radié, tous les plans qui lui sont parallèles sont radiés et ont leurs axes parallèles à l'axe du plan π ; de plus, leurs projections sur un plan réel perpendiculaire aux axes sont nécessairement des droites parallèles. Il suit de là que, par le point A, on peut mener un plan et un seul parallèle au plan π. Projetons le point A sur un plan réel perpendiculaire à l'axe de π, et soient PQ et A′ les projections du plan π et du point A. Dans le plan de projection, menons par le point A′ la parallèle à la droite PQ ; le plan déterminé par cette parallèle et le point A est parallèle au plan π.

Corollaire 1. — *Deux plans parallèles peuvent toujours être projetés sur un plan réel suivant deux droites parallèles.*

Il faut et il suffit que le plan réel soit perpendiculaire aux axes ou aux plans directeurs des deux plans parallèles.

Corollaire 2. — *Si deux plans sont parallèles : 1° tout plan qui coupe le premier coupe le second ; 2° tout plan parallèle au premier est parallèle au second ou coïncide avec le second.*

248. — Lorsqu'une droite n'a aucun point commun avec un plan, on dit que la droite et le plan sont *parallèles*.

Théorème. — *Si deux plans sont parallèles : 1° toute droite qui coupe le premier coupe le second ; 2° toute droite parallèle au premier plan est parallèle au second.*

Projetons les deux plans parallèles sur un plan réel tel que les projections de ces plans soient deux droites parallèles.

On démontre très facilement qu'une droite quelconque de l'espace coupe les deux plans parallèles ou est parallèle à chacun d'eux, suivant que sa projection sur le plan réel coupe les projections des deux plans ou est parallèle à ces deux droites.

249. — Théorème. — *Si, par un point* A *extérieur à un plan* π, *on mène des droites parallèles à ce plan, le lieu de ces parallèles est le plan* π', *mené par le point* A *parallèlement au plan* π.

Toutes les droites parallèles au plan π, menées par le point A, sont situées dans le second plan parallèle π' ; car, si l'une d'elles coupait le second plan π' en un point A, elle couperait aussi le premier plan π.

Et, réciproquement, toute droite du second plan qui passe par le point A est parallèle au premier ; car, si elle coupait le premier plan, elle couperait aussi le second.

250. — Deux droites sont dites *parallèles* lorsqu'elles sont situées dans un même plan et ne se coupent pas.

De cette définition on déduit immédiatement les propositions suivantes :

THÉORÈME. — *Quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les intersections sont des droites parallèles.*

COROLLAIRE. — *Par un point donné on peut toujours mener une parallèle à une droite donnée.*

Il suffit de conduire par la droite donnée un plan π qui ne passe pas par le point donné, puis de mener par le point donné un plan π' parallèle au plan π. Le plan déterminé par le point donné et la droite donnée coupera le plan π' suivant une droite, qui passera par le point donné et sera parallèle à la droite donnée.

251. — THÉORÈME. — *Si, par une droite parallèle à un plan, on mène un second plan qui coupe le premier, l'intersection des deux plans est une droite parallèle à la droite donnée.*

COROLLAIRE. — *Par un point donné on peut mener une infinité de plans parallèles à une droite donnée.*

Par le point donné menons une parallèle à la droite donnée. Tous les plans qui passent par cette parallèle n'ont aucun point commun avec la droite donnée, et par conséquent lui sont parallèles.

252. — THÉORÈME. — *Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

Par la droite donnée conduisons deux plans quelconques, P et Q, et par le point donné A menons les deux plans P′ et Q′ qui sont respectivement parallèles aux plans P et Q. Les plans P′ et Q′ se coupent suivant une droite AB ; car, s'ils coïncidaient, par un point quelconque de la droite donnée on pourrait mener deux plans distincts, P et Q, parallèles à un même plan. Le lieu géométrique des parallèles menées par le point A à toutes les droites du plan P est le plan P′. Par conséquent, toute parallèle à la droite donnée, menée par le point A, est contenue dans le plan P. On démontrerait de même qu'elle est aussi contenue dans le plan Q.

Donc, de toutes les droites que l'on peut mener par le point donné, l'intersection AB des plans P′ et Q′ est la seule qui puisse être parallèle à la droite donnée ; et la droite AB est nécessairement parallèle à la droite donnée, autrement il ne serait pas toujours possible de mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.

Le théorème est démontré.

253. — Théorème. — *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.*

Le plan sécant coupe le plan des deux droites parallèles suivant une troisième droite, qui coupe l'une des droites données et, par conséquent, l'autre; autrement, dans le plan, on pourrait mener par un point donné deux droites qui ne rencontrent pas une droite donnée, c'est-à-dire deux parallèles à une droite donnée.

Corollaire 1. — *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui contient la première ou qui lui est parallèle contient la seconde ou lui est parallèle.*

S'il n'en était pas ainsi, le plan couperait la seconde droite et par conséquent la première.

Corollaire 2. — *L'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite.*

En effet, si par un point commun aux deux plans on mène la parallèle à la droite donnée, cette parallèle appartient nécessairement à chacun des deux plans; autrement, l'un de ces plans couperait cette parallèle et, par conséquent, la droite donnée.

254. — Théorème. — *Par un point donné on peut toujours mener une droite parallèle à deux droites parallèles données.*

D'abord, si le point donné appartient au plan des deux parallèles données, il est évident que la parallèle menée par le point donné à l'une des parallèles données est parallèle à l'autre; car si elle ne lui était pas parallèle, elle la couperait en un point par lequel on pourrait mener deux parallèles à une même droite.

Conduisons par le point donné les deux plans qui passent par les deux parallèles données. La droite d'intersection de ces deux plans est parallèle aux deux parallèles données; sans quoi, elle couperait l'une des deux parallèles en un point situé à la fois sur le plan conduit par l'autre parallèle et le point donné, et sur le plan des deux parallèles, et les deux parallèles se couperaient en ce point.

255. — Théorème. — *Deux droites,* A *et* B, *parallèles à une troisième* C *sont parallèles entre elles.*

Par un point quelconque de la droite A menons la droite A′ parallèle aux deux droites parallèles B et C. Les droites A et A′ coïncident, puisqu'elles ont un point commun et sont toutes deux parallèles à la droite C. Donc, les droites A et B sont parallèles entre elles. (c. q. f. d.).

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9550-5-95.

ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

EXTRAIT DES STATUTS ET RÈGLEMENT

STATUTS

Art. 4. — Les membres de l'Association sont admis, sur leur demande, par le Conseil.

Art. 5. — Sont membres de l'Association les personnes qui versent la cotisation annuelle. Cette cotisation peut toujours être rachetée par une somme versée une fois pour toutes. Le taux de la cotisation et celui du rachat sont fixés par le Règlement.

Art. 6. — Sont membres fondateurs les personnes qui ont versé, à une époque quelconque, une ou plusieurs souscriptions de 500 francs.

Art. 7. — Tous les membres jouissent des mêmes droits. Toutefois, les noms des membres fondateurs figurent perpétuellement en tête des listes alphabétiques, et ces membres reçoivent gratuitement, pendant toute leur vie, autant d'exemplaires des publications de l'Association qu'ils ont versé de fois la souscription de 500 francs.

RÈGLEMENT

Article premier. — Le taux de la cotisation annuelle des membres non fondateurs est fixé à 20 francs.

Art. 2. — Tout membre a le droit de racheter ses cotisations à venir en versant, une fois pour toutes, la somme de 200 francs. Il devient ainsi membre à vie.

Il sera loisible de racheter les cotisations par deux versements annuels consécutifs de 100 francs.

Les membres ayant payé pendant vingt années consécutives la cotisation annuelle de 20 francs pourront racheter les cotisations à venir moyennant un seul versement de 100 francs.

Tout membre qui pendant dix années consécutives aura versé annuellement une somme de 10 francs en sus de la cotisation annuelle sera libéré de tout versement ultérieur.

La liste alphabétique des membres à vie est publiée en tête de chaque volume, immédiatement après la liste des membres fondateurs.

Les membres ayant racheté leurs cotisations pourront devenir membres fondateurs en versant une somme complémentaire de 300 francs.

Les souscriptions des membres fondateurs peuvent être versées en une seule fois ou en deux versements annuels consécutifs de 250 francs.

Les souscriptions sont reçues :

Au Secrétariat, 28, rue Serpente, à Paris.

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 9552-5-95